数理解析研究所講究録 1294 巻 2002 年 93-99

Eigenfunctions on a Riemannian symmetric space of the noncompact type with L^p-boundary value

Salem Ben Saïd*
大島利雄 (Toshio Oshima)†
示野信一 (Nobukazu Shimeno) ‡

概 要

非コンパクト型の Riemann 対称空間上の不変微分作用素の同時固有関数の境界値を考え，様々な関数のクラスに対して境界値の収束（"Fatou 型定理"）と，Poisson 変換の像の特徴付け（"Hardy 空間"）を論じる．

1 Helgason 予想（復習）

非コンパクト型の Riemann 対称空間上の不変微分作用素の同時固有関数は境界上の hyperfunction の Poisson 積分で表される．これについて復習する．詳しくは [8] を参照のこと．

1.1 記号

G を中心有限の連結実半単純 Lie 群，K をその極大コンパクト部分群とする．このとき G/K は非コンパクト型の Riemann 対称空間である．$G = KAN$ を岩澤分解，$g \in G$ に対して $H(g) \in \mathfrak{a} = \mathrm{Lie}(A)$ を $g \in K \exp H(g) N$ により定まる元とする．

たとえば，

$$G = SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}$$

$$K = SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : |\alpha| = 1 \right\}$$

$$G/K \simeq \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$$

*Department of Mathematics, Oklahoma State University, ssaid@math.okstate.edu
†東京大学大学院数理科学研究科, oshima@ms.u-tokyo.ac.jp
‡岡山理科大学理学部, shimeno@xmath.ous.ac.jp

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1+ix & -ix \\ ix & 1-ix \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathfrak{a} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

$M = Z_K(\mathfrak{a})$ とすると $P = MAN$ は G の極小放物型部分群で $G/P \simeq K/M$ は対称空間 G/K の境界である．$G = SU(1,1)$ の例では，$G/P \simeq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ である．

$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ を制限ルート系，W をその Weyl 群，Σ^+ を正ルートの集合，ρ を重複度をカウントした正ルートの和の半分とする．

1.2 Poisson 変換

$\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ とする．

$$\mathcal{B}_\lambda(G/P) = \{f \in \mathcal{B}(G) : f(gman) = a^{\lambda-\rho} f(g) \quad {}^\forall g \in G,\ m \in M,\ a \in A,\ n \in N\}$$

とする．ここで $\mathcal{B}(G)$ は G 上の hyperfunction（佐藤超関数）の空間である．K への制限により $\mathcal{B}_\lambda(G/P) \simeq \mathcal{B}(K/M)$ である．Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は

$$\mathcal{P}_\lambda f(gK) = \int_K f(gk)dk, \quad f \in \mathcal{B}_\lambda(G/P)$$

により定義される（ここで dk は K 上の正規化された不変測度）．これはまた，

$$\mathcal{P}_\lambda f(gK) = \int_K f(k) e^{-\langle \lambda+\rho, H(g^{-1}k)\rangle} dk$$

と書き表すことができる．$P_\lambda(gK, kM) = e^{-\langle \lambda+\rho, H(g^{-1}k)\rangle}$ を Poisson 核という．1 の Poisson 積分

$$\varphi_\lambda(gK) = \int_K e^{-\langle \lambda+\rho, H(g^{-1}k)\rangle} dk$$

を球関数という．

$\mathbb{D}(G/K)$ を G/K 上の G 不変な微分作用素全体のなす代数とする．$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ 上の symmetric algebra $S(\mathfrak{a})$ の W 不変元全体を $S(\mathfrak{a})^W$ とするとき，Harish-Chandra 同型

$$\gamma : \mathbb{D}(G/K) \simeq S(\mathfrak{a})^W$$

がある．これにより，$\mathbb{D}(G/K)$ から $\mathbb{C}$ への algebra homomorphism は $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ により，

$$\chi_\lambda(D) = \gamma(D)(\lambda), \quad D \in \mathbb{D}(G/K)$$

と表される．また $\chi_{w\lambda} = \chi_\lambda$ $(w \in W)$ が成立する．

$$\mathcal{A}_\lambda(G/K) = \{F \in \mathcal{A}(G/K) \,:\, DF = \chi_\lambda(D)F,\ {}^\forall D \in \mathbb{D}(G/K)\}$$

とする．ここで $\mathcal{A}(G/K)$ は G/K 上の実解析関数の空間を表す．$\mathrm{Im}\mathcal{P}_\lambda \subset \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ が成立する．

$G = S(1,1)$ の例では，単位円周 T 上の関数 f に対して，

$$\mathcal{P}_\lambda f(z) = \int_T f(t) \left(\frac{1-|z|^2}{|t-z|^2} \right)^{\frac{\lambda+1}{2}} dt$$

であり，$\lambda = 1$ のとき古典的な Poisson 積分になる．また $z = x + iy$ と書くとき，単位円板上の Laplace-Beltrami 作用素

$$\Delta = (1-x^2-y^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

により $\mathcal{D}(G/K)$ は生成される．Poisson 変換の像は方程式

$$\Delta F = \frac{\lambda^2-1}{4} F$$

を満たす．

次の定理は Helgason により $G = SU(1,1)$ の場合に証明され，一般の場合には [3] で証明された．

定理 1.1

$$-2\frac{\langle \lambda, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \notin \{1, 2, 3, \dots\} \quad {}^\forall \alpha \in \Sigma^+$$

ならば，$\mathcal{P}_\lambda$ は $\mathcal{B}_\lambda(G/P)$ から $\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ の上への同型写像を与える．

$$\langle \mathrm{Re}\,\lambda, \alpha \rangle \geq 0 \quad {}^\forall \alpha \in \Sigma^+$$

ならば定理の仮定は満たされ，$w \in W$ に対して，$\mathcal{A}_{w\lambda}(G/K) = \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ であるから，$\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ のすべての元は Poisson 積分で表される．

2 結果

2.1 λ への仮定

$\lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ に対して

$$W_\lambda = \{\, w \in W \,:\, w\lambda = \lambda \,\}, \quad W_\lambda^R = \{\, w \in W \,:\, w\mathrm{Re}\,\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda \,\}$$

とする．以下では常に $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ に次の仮定をおく．

$$\langle \operatorname{Re}\lambda, \alpha\rangle \geq 0 \quad {}^{\forall}\alpha \in \Sigma^+, \tag{1}$$
$$W_\lambda = W_\lambda^R. \tag{2}$$

これらの条件は $\lambda \in \mathfrak{a}^*$，あるいは

$$\langle \operatorname{Re}\lambda, \alpha\rangle > 0 \quad {}^{\forall}\alpha \in \Sigma^+ \tag{3}$$

ならば満たされる．

$$\Sigma_\lambda^+ = \{\alpha \in \Sigma^+ : \langle \lambda, \alpha\rangle = 0\}$$

とする．条件 (1)+(2) は次の条件と同値である．

$$\langle \operatorname{Re}\lambda, \alpha\rangle > 0 \quad {}^{\forall}\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_\lambda^+.$$

2.2 漸近展開

[1, Corollary 16.4] あるいは [5, Theorem 3.6] により，$a \to \infty$ としたときの Poisson 積分の漸近展開

$$\mathcal{P}_\lambda f(ka) \sim c_0(\lambda) f(k) \Pi_\lambda(\log a) a^{\lambda-\rho}$$

が成立する．ここで，

$$\Pi_\lambda(\log a) = \prod_{\alpha\in\Sigma_\lambda^+} \alpha(\log a)$$

とした．特に

$$\varphi_\lambda(a) \sim c_0(\lambda)\Pi_\lambda(\log a) a^{\lambda-\rho}$$

である．

λ が (3) を満たすとき，$W_\lambda = W_\lambda^R = \{e\}$, $\Pi_\lambda(\log a) = 1$ で，$c_0(\lambda)$ は Harish-Chandra の c-関数 $c(\lambda)$ に他ならない．したがって上式はよく知られた結果

$$\mathcal{P}_\lambda f(ka) \sim c(\lambda) f(k) a^{\lambda-\rho}$$

および

$$\varphi_\lambda(a) \sim c(\lambda) a^{\lambda-\rho}$$

2.3 境界値の収束

$$Q_\lambda(gK, kM) = \varphi_\lambda(g)^{-1}e^{-\langle\lambda+\rho, H(g^{-1}k)\rangle}$$

とおくと，次が成立する．これは [1] でも注意されており，(3) の下では [4] で証明された．証明は 2.2 節の漸近展開を用いる（最後の主張は定理 2.2(i) を用いて証明する．

命題 2.1

$$\int_{K/M} Q_\lambda(gK, kM)dk = 1,$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{K/M} |Q_\lambda(aK, kM)|\,dk = \frac{c_0(\mathrm{Re}\,\lambda)}{|c_0(\lambda)|},$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{K/M-E} |Q_\lambda(aK, kM)|dk = 0$$ （E は K/M における eM の任意の近傍）．

境界値の収束に関する結果は次の通り：

定理 2.2

$$\lim_{a\to\infty}\varphi_\lambda(a)^{-1}\mathcal{P}_\lambda f(ka) = f(k).$$

収束は，
(i) $f \in \mathcal{C}(K/M)$ に対して一様．
(ii) $f \in L^p(K/M)$ $(1 \le p < \infty)$ に対して L^p の意味で．
(iii) $f \in L^\infty(K/M)$ に対しては，$L^1(K)$ に対する weak* topology で．
(iv) $f \in \mathcal{C}^*(K/M)$ （K/M 上の finite regular signed measure）に対しては，$\mathcal{C}(K)$ に対する weak* topology で．
(v) $f \in \mathcal{F}(K/M)$ に対しては，$\mathcal{F}(K)$ の自然な強位相で．ただし，$\mathcal{F}$ は $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}'$, $\mathcal{C}^\infty$, $\mathcal{C}^m\,(m \ge 1)$ のいずれか．

(i) は [1] で証明されている．(3) の下で (i)-(iv) は [4] で証明された．

2.4 Hardy 空間

$1 \le p < \infty$ に対して，$\mathcal{H}^p_\lambda(G/K)$ を $F \in \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ で

$$\sup_{a\in A}\varphi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(a)^{-1}\left[\int_K |F(ka)|^p dk\right]^{1/p} < \infty \tag{4}$$

を満たすものの全体とする．$p = \infty$ に対して，$\mathcal{H}^\infty_\lambda(G/K)$ を $F \in \mathcal{A}_\lambda(G/K)$ で

$$\sup_{a\in A}\varphi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(a)^{-1}\left[\int_K |F(ka)|^p dk\right]^{1/p} < \infty \tag{5}$$

を満たすものの全体とする．

命題 2.3 $f \in L^p(K/M)$, $F = \mathcal{P}_\lambda f$ とするとき，$\|f\|_p$ は (4)（または (5)）の左辺に等しい．

定理 2.4 $1 \leq p < \infty$ のとき，任意の $F \in \mathcal{H}^p_\lambda(G/K)$ に対して，$F = \mathcal{P}_\lambda f$ となる $f \in L^p(K/M)$ がただ1つ存在する．$p = \infty$ のとき，任意の $F \in \mathcal{H}^\infty_\lambda(G/K)$ に対して，$F = \mathcal{P}_\lambda f$ となる $f \in C^*(K/M)$ がただ1つ存在する．

この定理は $\lambda = \rho$ のときは [11] で，(3) の下では [10] で証明されている．
定理の証明は $p = 2$ の場合に帰着される．

2.5 種々の境界の場合

P_Θ を P を含む G の放物型部分群，λ_Θ を P_Θ の指標とする．$\mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta)$ が $\mathcal{B}_\lambda(G/P)$ と同様に定義される．適当な $\lambda \in \mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$ をとると，$\mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta) \subset \mathcal{B}_\lambda(G/P)$ となる．Poisson 変換による $\mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta)$ の像は $\mathcal{A}_\lambda(G/K)$ の部分空間になるが，この空間はある微分方程式系 $\mathcal{N}_{\lambda_\Theta}$ の解空間 $\mathcal{A}(G/K, \mathcal{N}_{\lambda_\Theta})$ として特徴付けられることが知られており，その具体的な形が研究されている ([9], [7], [6])．

$\mathcal{H}^p_{\lambda_\Theta}(G/K) = \mathcal{A}(G/K, \mathcal{N}_{\lambda_\Theta}) \cap \mathcal{H}^p_\lambda(G/K)$ と定めると，Poisson 変換

$$\mathcal{P}_{\Theta,\lambda_\Theta} : \mathcal{B}_{\lambda_\Theta}(G/P_\Theta) \longrightarrow \mathcal{A}(G/K, \mathcal{N}_{\lambda_\Theta})$$

に対して，定理 2.2 と定理 2.4 の類似が成立する．

2.6 局所的な境界値の収束

$U \subset K/M$ を開集合，$\mathcal{F}$ を L^p, C^m, C^*, $\mathcal{D}'$ のいずれかとする．$\mathcal{BF}(K/M, \overline{U})$ を $f \in \mathcal{B}(K/M)$ で，ある開集合 $V \subset K/M$ があって $\overline{U} \subset V$ かつ $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ となるもの全体の集合とする．

定理 2.5 G/K は階数1であると仮定する．$f \in \mathcal{BF}(K/M, \overline{U})$, $k \in \tilde{U} = \{k \in K : kM \in U\}$ とするとき，

$$\lim_{a \to \infty} \varphi_\lambda(a)^{-1} \mathcal{P}_\lambda f(ka) = f(k).$$

収束は，
(i) $\mathcal{F} = L^p\,(1 \leq p < \infty)$, C^m, $\mathcal{D}'$ に対して $\mathcal{F}$ の位相で，
(ii) $\mathcal{F} = L^\infty$, C^* のとき weak* topology で．

定理 2.6 G/K は階数1であると仮定する．$f \in \mathcal{BF}(K/M, \overline{U}) \cap L^1(K/M)$ とするとき，$f|_U \in L^p(U)$ であるための必要十分条件は，

$$\begin{cases} \displaystyle\sup_{a \in A^+} \varphi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(a)^{-1} \left[\int_{\tilde{U}} |\mathcal{P}_\lambda f(ka)|^p dk \right]^{\frac{1}{p}} < \infty & (1 \leq p < \infty \text{ のとき}), \\ \displaystyle\sup_{k \in \tilde{U},\, a \in A} \varphi_{\mathrm{Re}\,\lambda}(ka)^{-1} |\mathcal{P}_\lambda f(ka)| < \infty & (p = \infty \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることである.

注意 2.7 我々の結果が成り立つためには, 2.1 節で置いた λ への仮定が本質的である.

参考文献

[1] E. P. van den Ban and H. Schlichtkrull, *Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on a Riemannian symmetric spaces*, J. Reine Angrew. Math. **380** (1987), 108–165.

[2] S. Ben Saïd, T. Oshima, and N. Shimeno, *Eigenfunctions on a Riemannian symmetric space of the noncompact type with L^p-boundary value*, preprint.

[3] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and T. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann. of Math. **107** (1978), 1–39.

[4] H. L. Michelson, *Fatou theorems for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1973), 257–274.

[5] T. Oshima, *Asymptotic behavior of spherical functions on semisimple symmetric spaces*, Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima, 1986, pp. 561–601, Adv. Stud. Pure Math. **14**, Academic Press, Boston, MA, 1988.

[6] T. Oshima, *Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras*, UTMS 2001-29, preprint, 2001.

[7] T. Oshima and N. Shimeno, *Boundary value problems on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*, in preparation.

[8] H. Schlichtkrull, *Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stutgart, 1984.

[9] N. Shimeno, *Boundary value problems for the Shilov boundary of a bounded symmetric domain of tube type*, J. of Funct. Anal. **140** (1996), 124–141.

[10] P. Sjögren, *Characterizations of Poisson integrals on symmetric spaces*, Math. Scand. **49** (1981), 229–249.

[11] M. Stoll, *Hardy-type spaces of harmonic functions on symmetric spaces of noncompact type*, J. Reine Angew Math. **271** (1974), 63–76.